SỞ GD & ĐT HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT SƠN TÂY

MÔN: TOÁN

ĐÁP ÁN HỆ THỐNG CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP HỖ TRỢ HỌC SINH LỚP 12 HỌC TẬP TRỰC TUYẾN TRONG THỜI GIAN NGHỈ PHÒNG DỊCH COVID-19

TUẦN 1

I. Bài: Tích phân – Tiết 1.

Câu 1: Chọn D

Câu 2: Chọn A

Ta có $\int\limits_0^3 \mathrm{d}x = x\Big|_0^3 = 3-0=3$.

Câu 3: Chọn B

$\int\limits_0^2 (4x-3)\mathrm{d}x = \left(2x^2-3x\right)\Big|_0^2 = 2$

Câu 4: Chọn D

Ta có: $\int\limits_0^2 x^3\mathrm{d}x = \left.\dfrac{x^4}{4}\right|_0^2 = 4 = F(2)-F(0)$.

Câu 5: Chọn B

$I = \int\limits_1^2 \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x = \left.\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right|_1^2 = \dfrac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4}-1\right)$

Câu 6: Chọn B

Ta có: $I = \int\limits_0^1 8^x\mathrm{d}x = \left.\left(\dfrac{8^x}{\ln 8}\right)\right|_0^1 = \dfrac{8}{\ln 8} - \dfrac{1}{\ln 8} = \dfrac{7}{3\ln 2}$.

Câu 7: Chọn C

$I = \int\limits_0^1 \dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}(x+1)}{x+1} = \ln|x+1|\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

Câu 8: Chọn C

$\int\limits_0^{\mathrm{e}} \cos x\mathrm{d}x = \sin x\Big|_0^{\mathrm{e}} = \sin \mathrm{e}$.

Câu 9: Chọn B

Tính được $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Câu 10: Chọn C

$I = \int\limits_1^2 (2mx+1)\mathrm{d}x = \left(mx^2+x\right)\Big|_1^2 = 4m+2-m-1 = 3m+1$.

$I = 4 \Leftrightarrow m = 1$.

Câu 11: **Chọn D**

Nhận thấy với $m>1 \Rightarrow 2mx-1>0, \forall x\in[1;m]$

Ta có $\int_1^m |2mx-1|\,\mathrm{d}x = \int_1^m (2mx-1)\,\mathrm{d}x = \left(mx^2-x\right)\Big|_1^m = m^3-2m+1$.

Do đó $m^3-2m+1=1 \Leftrightarrow m^3-2m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow m=2\in(1;3)$.

Câu 12: **Chọn C**

$\int_1^3 f'(x)dx=7 \Leftrightarrow f(x)\Big|_1^3=7 \Leftrightarrow f(3)-f(1)=7$

$\Rightarrow f(1)=4-7=-3$

Câu 13: **Chọn D**

Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(4x^3-3x+2\right)\mathrm{d}x=x^4-\frac{3}{2}x^2+2x+C$.

Mà $F(-1)=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow 1-\frac{3}{2}-2+C=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow C=1$.

Vậy $F(x)=x^4-\frac{3}{2}x^2+2x+1$.

Khi đó $F(x)=2x+1 \Leftrightarrow x^4-\frac{3}{2}x^2+2x+1=2x+1 \Leftrightarrow x^2\left(x^2-\frac{3}{2}\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 14: **Chọn A**

$\int_0^4 f'(x)\mathrm{d}x-\int_0^2 f'(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_0^4 - f(x)\Big|_0^2 = f(4)-f(2)=2$.

Câu 15: **Chọn A**

Gọi (H) là diện tích phần giới hạn bởi parabol, trục hoành, và hai đường thẳng x = -2, x = 2;

(B) là diện tích hình chữ nhật giới hạn bởi đường thẳng y = 4, trục hoành và hai đường thẳng x = -2, x = 2;

Và (H’) thì là diện tích phần gạch chéo thì:

$$S_{H'}=S_B-S_H=16-\int_{-2}^{2}x^2dx=16-\frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{2}=\frac{32}{3}.$$

II. Bài: Phương trình mặt phẳng – Tiết 1.

Câu 1: **Chọn C.**

Câu 2: **Chọn D.**

Ta có $(P): \frac{x}{1}-\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1 \Leftrightarrow 6x-3y+2z-6=0 \Rightarrow (P)$ có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(6;-3;2)$.

Câu 3: **Chọn A**

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;-3)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1;3)$ là :

$2(x-1)-1(y-2)+3(z+3)=0 \Leftrightarrow 2x-y+3z+9=0$.

Câu 4: **Chọn C.**

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(-4;3;1)$, $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(4;3;7)$

$\Rightarrow (ABC)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(4;3;7)$.

Câu 5: **Chọn A.**

A là hình chiếu của $M(3;0;2)$ trên trục Ox nên ta có $A(3;0;0)$.

B là hình chiếu của $M(3;0;2)$ trên mặt phẳng (Oyz) nên ta có $B(0;0;2)$.

Gọi I là trung điểm AB. Ta có $I\left(\frac{3}{2};0;1\right)$.

Mặt phẳng trung trực đoạn thẳng AB đi qua I và nhận $\overrightarrow{BA}=(3;0;-2)$ làm véc tơ pháp tuyến nên có phương trình $3\left(x-\frac{3}{2}\right)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow 3x-2z-\frac{5}{2}=0$.

Câu 6: **Chọn C.**

Ta có: $\overrightarrow{BC}=(-4;2;0)$ suy ra một vecto pháp tuyến là $\vec{n}=(-2;1;0)$

Vậy phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC có dạng:

$-2(x-0)+1(y-1)=0 \Leftrightarrow -2x+y-1=0 \Leftrightarrow 2x-y+1=0$.

Câu 7: **Chọn D**

Cách 1: Ta có $\begin{cases}\vec{j}=(0;1;0)\\ \overrightarrow{OM}=(3;-1;4)\end{cases} \Rightarrow \left[\vec{j},\overrightarrow{OM}\right]=(4;0;-3)$.

Do đó (α) qua điểm M và có 1 véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(4;0;-3)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (α) là $4(x-3)+0(y+1)-3(z-4)=0$ hay $4x-3z=0$.

Vậy chọn phương án **D**.

Cách 2 (Trắc nghiệm)

Mặt phẳng (α) chứa Oy nên loại B và C.

Thay toạ độ điểm M vào phương trình ở phương án A và D. Suy ra chọn phương án **D**.

Câu 8: **Chọn C**

C1. Nhận xét (ABC) có 1 vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OM}=(2;1;-3)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC): $2(x-2)+1(y-1)-3(z+3)=0 \Leftrightarrow 2x+y-3z-14=0$

Cách 2. Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, $abc \neq 0$.

Khi đó mặt phẳng (α) có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Do $M \in (\alpha) \Rightarrow \frac{2}{a}+\frac{1}{b}-\frac{3}{c}=1 \quad (1)$

Ta có: $\overrightarrow{AM}=(2-a;1;-3)$, $\overrightarrow{BM}=(2;1-b;-3)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-b;c)$, $\overrightarrow{AC}=(-a;0;c)$

Do M là trực tâm tam giác ABC nên: $\begin{cases}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-b-3c=0\\ -2a-3c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-3c\\ a=-\dfrac{3c}{2}\end{cases}$ (2)

Thay (2) vào (1) ta có: $-\dfrac{4}{3c}-\dfrac{1}{3c}-\dfrac{3}{c}=1 \Leftrightarrow c=-\dfrac{14}{3} \Rightarrow a=7, b=14.$

Do đó $(\alpha): \dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{14}-\dfrac{3z}{14}=1 \Leftrightarrow 2x+y-3z-14=0.$

Câu 9: **Chọn A.**

A, B, C lần lượt là hình chiếu của M trên các trục Ox, Oy, Oz nên $A(-3;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;4)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC): $\dfrac{x}{-3}+y+\dfrac{z}{4}=1 \Leftrightarrow 4x-12y-3z+12=0$.

Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) là: $4x-12y-3z+12=0$.

Câu 10: **Chọn B**

Giả sử mặt phẳng $(P): ax+by+cz-18=0$ cắt 3 trục toạ độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C.

Do $A\in Ox \Rightarrow A(x_A;0;0)$; $B\in Oy \Rightarrow B(0;y_B;0)$; $C\in Oz \Rightarrow C(0;0;z_C)$.

Vì $G(1;-3;2)$ là trọng tâm tam giác ABC nên :

$$\begin{cases}\dfrac{x_A+0+0}{3}=1\\ \dfrac{0+y_B+0}{3}=-3\\ \dfrac{0+0+z_C}{3}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_A=3\\ y_B=-9\\ z_C=6\end{cases} \Rightarrow A(3;0;0), B(0;-9;0), C(0;0;6).$$

Do $A, B, C\in(P)$ nên mp(P) có phương trình: $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-9}+\dfrac{z}{6}=1 \Leftrightarrow 6x-2y+3z-18=0$.

Suy ra: $a=6; b=-2; c=3$. Vậy $a+b+c=7$.

Câu 11: **Chọn A**

$\overrightarrow{AB}=(1;2;7)$, $\overrightarrow{AC}=(-4;4;-4)$.

Mặt phẳng (ABC) qua điểm $A(0;2;1)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(-36;-24;12)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (ABC): $-36x-24(y-2)+12(z-1)=0$ hay $3x+2y-z-3=0$.

$$\Rightarrow \begin{cases}a=2\\ b=-1\\ c=-3\end{cases} \Rightarrow a+b+c=-2.$$

Câu 12: **Chọn A**

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$. Từ đó ta có $OA=|a|$, $OB=|b|$, $OC=|c|$

Mặt phẳng qua các điểm A, B, C có phương trình theo đoạn chắn: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ (P).

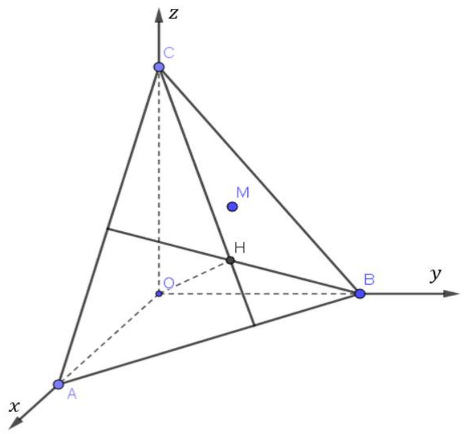
Vì $M\in(P)$ nên $\dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{b}+\dfrac{2}{c}=1$. Vì $OA=OB=OC \Rightarrow |a|=|b|=|c|$

Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{b}+\dfrac{2}{c}=1\\ |a|=|b|=|c|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{b}+\dfrac{2}{c}=1\\ |a|=|b|\\ |b|=|c|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{b}+\dfrac{2}{c}=1\\ \left[\begin{array}{l}a=b\\ a=-b\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}b=c\\ b=-c\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{b}+\dfrac{2}{c}=1\\ a=b=c\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{b}+\dfrac{2}{c}=1\\ a=b=-c\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{b}+\dfrac{2}{c}=1\\ a=-b=c\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{b}+\dfrac{2}{c}=1\\ a=-b=-c\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b=-c=-4\\ a=-b=c=6\\ a=-b=-c=2\end{array}\right..$$

Vậy có 3 mặt phẳng thỏa mãn.

Câu 13: **Chọn B**



Gọi H là trực tâm $\triangle ABC$.

Ta có: $\begin{cases}BH\perp AC\\ OB\perp AC\end{cases}\Rightarrow AC\perp(OBH)\Rightarrow AC\perp OH\ (1)$.

Chứng minh tương tự ta có: $BC\perp OH\ (2)$.

Từ $(1),(2)\Rightarrow OH\perp(ABC)$.

Ta có: $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}=\dfrac{1}{OH^2}$.

Vậy để biểu thức $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất thì OH đạt giá trị lớn nhất.

Mà $OH\le OM$ nên suy ra OH đạt giá lớn nhất bằng OM hay $H\equiv M$.

Vậy $OM\perp(ABC)\Rightarrow(P)$ có 1 vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OM}=(1;3;4)$.

Phương trình mặt phẳng (P): $1(x-1)+3(y-3)+4(z-4)=0\Leftrightarrow x+3y+4z-26=0$.

Câu 14: **Chọn D**

Giả sử $A(a;0;0)\in Ox$, $B(0;b;0)\in Oy$, $C(0;0;c)\in Oz$ và $(a,b,c>0)$.

Ta có $OA+OB+OC=a+b+c$.Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Ta có: $M(1;9;4)\in(P)\Rightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{9}{b}+\dfrac{4}{c}=1$.

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{4}{c}\right)(a+b+c)=\left(\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{9}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{4}{c}}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2\right)\ge(1+3+2)^2$$

$\Rightarrow a+b+c\ge(1+2+3)^2$.

Dấu $"="$ xảy ra khi: $\begin{cases} \dfrac{1}{a}+\dfrac{9}{b}+\dfrac{4}{c}=1 \\ \dfrac{1}{a}=\dfrac{3}{b}=\dfrac{2}{c} \\ a+b+c=(1+3+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=18 \\ c=12 \end{cases} \Rightarrow (P): \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{18}+\dfrac{z}{12}=1$ (thỏa).

Vậy mặt phẳng (P) đi qua điểm $(0;0;12)$.

Câu 15: **Chọn A**

Gọi $(a;0;0)$, $(0;b;0)$, $(0;0;c)$ lần lượt là tọa độ các điểm A, B, C ($a>0$, $b>0$, $c>0$).

Thể tích khối tứ diện $OABC$ là: $V=\dfrac{1}{6}abc$.

Phương trình mặt phẳng $(P): \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Điểm $M(1;8;1) \in (P) \Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{8}{b}+\dfrac{1}{c}=1 \Rightarrow 1=\dfrac{1}{a}+\dfrac{8}{b}+\dfrac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{8}{abc}} \Rightarrow abc \geq 216$.

$\Rightarrow V \geq 36$. Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} \dfrac{1}{a}+\dfrac{8}{b}+\dfrac{1}{c}=1 \\ \dfrac{1}{a}=\dfrac{8}{b}=\dfrac{1}{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c=3 \\ b=24 \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng $(P): \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{24}+\dfrac{z}{3}=1 \Leftrightarrow 8x+y+8z-24=0$.

TUẦN 2.

III. Bài : Tích phân – Tiết 2.

Câu 1: **Chọn B.**

Ta có

$$\int_5^2 \left[2-4f(x)\right]\mathrm{d}x = 2\int_5^2 \mathrm{d}x - 4\int_5^2 f(x)\mathrm{d}x = 2x\Big|_5^2 + 4\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x = 2.(2-5)+4.10 = 34.$$

Câu 2: **Chọn C.**

Ta có $\int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_b^d f(x)\mathrm{d}x + \int_d^a f(x)\mathrm{d}x + \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$

$$= \int_b^d f(x)\mathrm{d}x - \int_a^d f(x)\mathrm{d}x + \int_a^c f(x)\mathrm{d}x = 8-10+7=5.$$

Câu 3: **Chọn B.**

Ta có $\int_1^4 \left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x = \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^4 g(x)\mathrm{d}x = 3+7=10$.

Do đó A đúng.

Ta có $\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x = \int_3^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = -\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = -(-2)+3=5$.

Do đó B sai, C đúng.

Ta có $\int_1^4 \left[4f(x)-2g(x)\right]\mathrm{d}x = 4\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x - 2\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x = 4.3-2.7=-2$.

Do đó D đúng.

Câu 4: **Chọn C.**

Ta có $A = 3\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + 2\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x = 1$ và $B = 2\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x - \int_1^2 g(x)\mathrm{d}x = -3$.

Đặt $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = u$ và $\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x = v$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3u+2v=1 \\ 2u-v=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-\dfrac{5}{7} \\ v=\dfrac{11}{7} \end{cases}$

Vậy $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = u = -\dfrac{5}{7}$.

Câu 5: **Chọn B**

Ta có: $\underbrace{x^2-x}_{f(x)}=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
f(x)	+	0	-	0	+

$$I = \int_{-1}^2 \left|x^2-x\right|\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \left(x^2-x\right)\mathrm{d}x + \int_0^1 \left(-x^2+x\right)\mathrm{d}x + \int_1^2 (x^2-x)\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^0 + \left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2 = \frac{11}{6}$$

Câu 6: **Chọn B**

Đặt $t=\sqrt{1+x^2}\Rightarrow t^2=1+x^2\Rightarrow x\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$

Đổi cận: $\begin{cases} x=1\Rightarrow t=\sqrt{2} \\ x=\sqrt{3}\Rightarrow t=2 \end{cases}$

Ta có $I=\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} t.t\mathrm{d}t=\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} t^2\mathrm{d}t=\left.\left(\dfrac{t^3}{3}\right)\right|_{\sqrt{2}}^{2}=\dfrac{8-2\sqrt{2}}{3}$

Câu 7: **Chọn C**

Đặt $t=3x\Rightarrow \dfrac{1}{3}dt=\mathrm{d}x$

Đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=0 \\ x=1\Rightarrow t=3 \end{cases}$

Ta có $I=\int\limits_0^3 f(t).\dfrac{1}{3}.dt=\dfrac{1}{3}\int\limits_0^3 f(t).dt=\dfrac{1}{3}.12=4$.

Câu 8: **Chọn C**

Đặt $t=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow t^2=1-x^2\Rightarrow x\mathrm{d}x=-t\mathrm{d}t$

Đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=1 \\ x=1\Rightarrow t=0 \end{cases}$

Ta có $I=\int\limits_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}.x\mathrm{d}x=-\int\limits_1^0 \left(1-t^2\right)^2.t.t\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 \left(1-t^2\right)^2.t^2.\mathrm{d}t$

Câu 9: **Chọn C**

Ta có: $\int\limits_{\pi}^{b} 4\cos 2x dx=1\Leftrightarrow 2\sin 2x\Big|_{\pi}^{b}=1\Leftrightarrow \sin 2b=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=\dfrac{\pi}{12}+k\pi \\ b=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi \end{array}\right.\ (k\in Z)$.

Do đó, có 4 số thực b thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10: **Chọn A**

Ta có: $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \dfrac{2}{x+1}\mathrm{d}x+\int\limits_1^3 (2x-1)\mathrm{d}x$

$=2\ln|x+1|\Big|_0^1+\left(x^2-x\right)\Big|_1^3=\ln 4+6$.

Câu 11: **Chọn A**

$P=\int\limits_0^m \left(x-x^2\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}\right)\right|_0^m=\dfrac{m^2}{2}-\dfrac{m^3}{3}$.

Đặt $f(m)=\dfrac{m^2}{2}-\dfrac{m^3}{3}\Rightarrow f'(m)=m-m^2\Rightarrow f'(m)=0\Leftrightarrow m=0$ hoặc $m=1$.

Lập bảng biến thiên

m	0		1		$+\infty$
$f'(m)$		+	0	-	
$f(m)$	0 $-\infty$	↗	$\dfrac{1}{6}$	↘	

Vậy $f(m)$ đạt GTLN tại $m=1$ khi m dương.

Câu 12: Chọn **D**

Đặt $t=2.\sin x \Rightarrow \frac{1}{2}dt=\cos x.dx$

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=2 \end{cases}$

Ta có $I=\int_0^2 f(t).\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t).dt=\frac{1}{2}.6=3$.

Câu 13: Chọn D

Đặt $t=2-x \Rightarrow x=2-t \Rightarrow \quad dx=-dt$.

ta có $I=\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x=-\int_{3}^{-1} f(2-t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{3} f(2-x)\mathrm{d}x$.

Từ $f(2-x)+f(x)=\frac{1}{2}x^2-x$, ta có $2I=\int_{-1}^{3}\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3} \Rightarrow I=\frac{1}{3}$.

Câu 14: Chọn A.

Đặt $t=\tan x \Rightarrow \mathrm{d}t=\left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\mathrm{d}x$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0$ và $x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow t=1$.

Do đó: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x=4 \Rightarrow \int_0^1 \frac{f(t)\mathrm{d}t}{1+t^2}=4 \Rightarrow \int_0^1 \frac{f(x)\mathrm{d}x}{1+x^2}=4$.

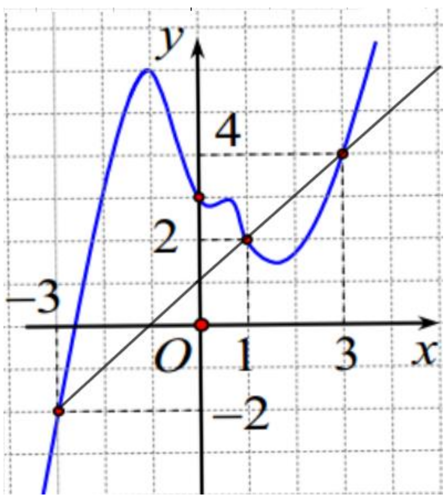
Nên $\int_0^1 \frac{f(x)\mathrm{d}x}{1+x^2}+\int_0^1 \frac{x^2 f(x)\mathrm{d}x}{1+x^2}=4+2 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{(1+x^2)f(x)}{1+x^2}=6 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=6$.

Câu 15: Chọn B

Ta có $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$

$\Rightarrow g'(x)=2f'(x)-(2x+2)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x+1$. Quan sát trên đồ thị ta có hoành độ giao điểm của $f'(x)$ và $y=x+1$ trên khoảng $(-3;3)$ là $x=1$.

Vậy ta so sánh các giá trị $g(-3)$, $g(1)$, $g(3)$.



Xét $\int_{-3}^{1} g'(x)\mathrm{d}x=2\int_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x>0$.

$\Leftrightarrow g\left(1\right)-g\left(-3\right)>0\Leftrightarrow g\left(1\right)>g\left(-3\right)$.

Tương tự xét $\int\limits_{1}^{3}g'\left(x\right)\mathrm{d}x=2\int\limits_{1}^{3}\left[f'\left(x\right)-\left(x+1\right)\right]\mathrm{d}x<0\Leftrightarrow g\left(3\right)-g\left(1\right)<0\Leftrightarrow g\left(3\right)<g\left(1\right)$.

Vậy $\max\limits_{[-3;3]}g\left(x\right)=g\left(1\right)$.